DE ECONOMIST 115, NR. 5, 1967

TWEE VISIES OP HET VRAAGSTUK VAN DE KAPITAALACCUMULATIE[1]

DOOR

PROF. DR. TH. VAN DE KLUNDERT

1. DE STRUCTUUR VAN DE THEORIE

Het onderscheid tussen de positieve en de normatieve theorie werkt in vele opzichten verhelderend. In de positieve theorie wordt uitgegaan van een bepaald gedragspatroon van de economische subjecten, waarbij de gevolgen van dit handelen in het kader van een theoretisch systeem worden geanalyseerd. Daarentegen staat in de normatieve theorie een doelstelling voorop, terwijl het theoretisch onderzoek gericht is op het nagaan van de voorwaarden tot verwezenlijking van dit doel. In zoverre het veronderstelde gedrag van de economische subjecten een doelstellend karakter heeft, komt het gemaakte onderscheid neer op het onderkennen van twee verschillende zijden van dezelfde medaille.

De geschetste samenhang tussen beide beschouwingswijzen komt duidelijk naar voren bij de formulering van het optimum-theorema van Pareto. Daarbij wordt verondersteld, dat de consumenten nutsmaximering nastreven, terwijl de producenten gehouden zijn niets te verspillen. Indien de vraag van de consumenten afgeleid wordt uit de nutsmaximering en de producenten hun winst zo hoog mogelijk stellen, ontstaat bij flexibele prijzen een evenwicht met normatieve kenmerken. Vandaar dat op basis van het neo-klassieke, statische, algemene evenwichtsmodel het volgende fundamentele theorema kan worden geformuleerd: *Ieder evenwicht bij volledige mededinging is een Pareto-optimum; en ieder Pareto-optimum is een evenwicht bij volledige mededinging.*[2]

Wordt de normatieve theorie geplaatst in het teken van een so-

[1] Gastcollege, op 27 april 1967 gegeven aan de Rijksuniversiteit te Groningen.
[2] Cf. R. Dorfman, P. A. Samuelson, en R. M. Solow, *Linear Programming and Economic Analysis*, 1958, hoofdstuk 14.

ciale welvaartsfunctie, dan is de samenhang met de positieve theorie minder direct. Immers met behulp van een dergelijke functie wil men verder reiken dan de ordinalistische nutsopvatting, die aan de analyse van Pareto ten grondslag ligt, toelaat.

Er is echter nog een tweede verschil. In de positieve theorie worden ook de niet-evenwichtige situaties aan een nader onderzoek onderworpen. Het spinnewebprobleem, om hiervan een voorbeeld te noemen, heeft echter geen pendant in de normatieve theorie. Aan het gedrag van de economische subjecten in niet-evenwichtige situaties kan in het kader van de economische theorie geen normatieve betekenis worden toegekend.

De bovenstaande opmerkingen kunnen met behulp van de groeitheorie worden geïllustreerd. In de positieve groeitheorie dient rekening te worden gehouden met de mogelijkheid van investeringen, die achteraf blijken foutief te zijn geweest. Foutieve investeringen nopen tot een aanpassing, die bepaald wordt door de reacties van de ondernemers. De vraag is nu, of de correctie leidt tot de gewenste positie. Zoals bekend, heeft R. Harrod dit vraagstuk met behulp van een macro-economisch model geanalyseerd. Men kan de afzetproblematiek ook buiten beschouwing laten en de aandacht concentreren op de produktiemogelijkheden in een groeiende economie. De dynamiek van het systeem komt dan uitsluitend tot uitdrukking in de opeenhoping van kapitaalgoederen. Duidelijk is, dat op lange termijn de kapitaalaccumulatie op een of andere manier gelijke tred moet houden met de toeneming van het arbeidsaanbod, wil een volledige inschakeling van de produktiefactoren arbeid en kapitaal mogelijk blijven.

De toestand, waarbij arbeid en kapitaal evenredig toenemen, wordt door sommigen aangeduid als evenwichtige groei, terwijl anderen aan een meer neutrale term de voorkeur geven. Het begrip evenwichtige groei kan immers een ruimere extensie worden gegeven door het toe te passen op alle situaties, waarbij van afzetproblemen op de wijze van Harrod is geabstraheerd. De situatie, waarbij kapitaal en output evenredig stijgen zou dan als gelijkmatige groei kunnen worden bestempeld. In het geval, dat arbeid schaars is, wordt het stijgingstempo van de bovengenoemde grootheden uiteraard bepaald door de bevolkingsaanwas.

Bij de methode van de comparatieve dynamica worden situaties van gelijkmatige groei met elkaar vergeleken. De verschillen in resultaat kunnen dan worden toegeschreven aan wijzigingen in de parameters. De verkregen conclusies zeggen niets over het aanpassingsproces van de ene situatie van gelijkmatige groei naar de andere. De vraag of het systeem stabiel is, blijft dan ook onbeantwoord. Het onderzoek naar de stabiliteit vergt een dynamische aanpak. De accumulatie kan in de vorm van een differentiaalvergelijking (of bij meerdere kapitaalgoederen een stelsel van simultane differentiaalvergelijkingen) worden weergegeven. De oplossing hiervan laat zien of het systeem, gegeven een willekeurige uitgangssituatie, naar de gelijkmatige groei tendeert. Hahn en Matthews spreken in dit verband van „equilibrium dynamics" om aan te duiden, dat van het probleem van Harrod wordt geabstraheerd.[3] De analyse van groeipaden, waarbij niet alle markten geruimd worden, karakteriseren deze auteurs daarentegen als „disequilibrium dynamics".

De normatieve groeitheorie vertoont dezelfde karakteristieken als de „equilibrium dynamics". In tegenstelling tot wat het geval is in de positieve theorie wordt de accumulatie bij het streven naar een optimum echter bepaald door een sociale welvaartsfunctie. Bij de formulering van dynamische optimumtheorieën rijst meteen een probleem, dat in de statica geen rol speelt. Immers, indien men de verwezenlijking van het optimum als een vraagstuk van planning ziet, op welke wijze dient dan de planningperiode gefixeerd te worden? De bepaling van een eindige periode is altijd in zekere mate arbitrair. Stel, men wil het collectieve nut van de consumptiestroom gedurende x jaren maximeren. Dit betekent, dat de kapitaalgoederenvoorraad aan het einde van deze periode bekend moet worden verondersteld. Deze voorraad van kapitaalgoederen bepaalt het consumptiepotentieel in de verre toekomst, en legt tegelijkertijd beperkingen op aan de consumptieve mogelijkheden gedurende de planningperiode. Het is duidelijk, dat met de omvang van de kapitaalgoederenvoorraad bij het maximeringsprobleem als nevenvoorwaarde rekening dient te worden gehouden.

Vanuit theoretisch standpunt is het daarom ideaal de tijdhorizon naar het oneindige te verplaatsen. Hierbij doet zich onmiddellijk een mathematische moeilijkheid voor. Indien consumptie altijd nut blijft afwerpen, kan men dan wel maximeren? Anders gezegd: een keuze uit alternatieven, die alle een nut van oneindig opleveren, is

[3] F. H. Hahn en R. C. O. Matthews, „The theory of economic growth: a survey", *Economic Journal*, december 1964; herdrukt in *Surveys of Economic Theory*, deel II, 1965.

niet mogelijk. Dank zij het pionierswerk van F. Ramsey en de ontwikkeling van de moderne groeitheorie kan deze moeilijkheid, zoals nog zal worden gedemonstreerd, uit de weg worden geruimd.

Staat niet de consumptie voorop, maar gaat het daarentegen om een snelle industrialisatie, dan is een eindige planninghorizon essentieel. De problematiek van de maximering van de kapitaalgoederenvoorraad vereist evenwel een gedesaggregeerd model. In een macro-economische beschouwingswijze is het gestelde probleem triviaal. Het elegante groeimodel van J. von Neumann is dan ook bij uitstek geschikt voor de analyse van industrialisatievraagstukken. In de onderhavige publicatie zullen wij aan dit type van een dynamische optimumtheorie echter geen verdere aandacht schenken.[4]

Zowel in de positieve als ook in de normatieve groeitheorie speelt de conceptie van de gelijkmatige groei een belangrijke rol. Zoals reeds gesteld, wordt het expansietempo op lange termijn ingeval van arbeidsschaarste bepaald door de bevolkingsaanwas. Dit is niet bevredigend, daar de groei juist in stand wordt gehouden door de stroom van technische uitvindingen en vernieuwingen, waarmee een ieder wordt geconfronteerd. Naast de bevolkingsaanwas als determinant van de groei heeft men daarom veelal de technische vooruitgang in de vorm van een autonoom gegeven exponentiële trend in het systeem opgenomen. Het blijkt dan echter, dat specifieke eisen moeten worden gesteld ten aanzien van de wijze, waarop de technische vooruitgang kan worden ingebouwd. Deze eisen vloeien voort uit de wens een gelijkmatig groeipatroon te kunnen behouden.

In een systeem als dat van Von Neumann, waar arbeid overvloedig is, of in een model met slechts één produktiefactor (kapitaal), zoals door D. Dewey wordt gehanteerd,[5] komt de technische vooruitgang niet expliciet naar voren. Dewey stelt uitdrukkelijk, dat de produktiviteit van investeringen voortvloeit uit de voortdurende stroom van technische vernieuwingen. Nochtans geeft deze auteur de economische ontwikkeling weer in de vorm van een natuurlijk groeiproces. Dit illustreert nog eens de beperkte kennis, die wij van het verschijnsel van de economische groei hebben. De groeitheorie is nog teveel een theorie van de *kapitaalaccumulatie* geplaatst tegen de achtergrond van een in wezen statische opvatting van de produktiemogelijkheden.

[4] Voor een verbale explicatie van de zgn. „turnpike"-theorema's kan worden verwezen naar J. R. Hicks, *Capital and Growth*, 1965, hoofdstuk XIX.
[5] D. Dewey, *Modern Capital Theory*, 1965.

2. DE POSITIEVE GROEITHEORIE

De bespreking van de positieve groeitheorie omvat vier onderwerpen, ondergebracht in evenzoveel subparagrafen. Na een presentatie van het vraagstuk van Harrod in de eerste subparagraaf wordt van de conjuncturele problematiek in het resterende gedeelte van paragraaf 2 geabstraheerd.

Voor een gelijkmatige groei is vereist, dat de relevante functies van het model (lineair) homogeen zijn. Vanzelfsprekend laat dit nog een ruime keuzemogelijkheid toe. In paragraaf 2.2 wordt een model met twee sectoren en vaste technische coëfficiënten besproken. Dit model sluit enigszins aan op de beschouwingen naar aanleiding van de analyse van Harrod. Overigens kan worden opgemerkt, dat in paragraaf 3 de gelijkmatige groei opnieuw aan de orde zal komen. Daarbij zal dan worden uitgegaan van een macro-economische, neoklassieke produktiefunctie.

De paragrafen 2.3 en 2.4 bevatten extensies van het eerder geïntroduceerde model. Deze uitbreidingen hebben respectievelijk betrekking op de autonoom bepaalde technische vooruitgang en het vraagstuk van de stabiliteit bij een willekeurig gegeven uitgangssituatie.

2.1. *Het probleem van Harrod („disequilibrium dynamics")*

Om de gedachtengang van Harrod weer te geven is het dienstig uit te gaan van vaste technische coëfficiënten. Aangezien slechts één eindprodukt wordt onderscheiden, impliceert dit dat een volledige inschakeling van arbeid en kapitaal slechts bij wijze van toeval mogelijk is. Substitutie van produktiefactoren of eindprodukten is *ex hypothesi* uitgesloten. Gegeven een constante spaarquote is de gelijkmatige groei mogelijk, indien de bevolkingsaanwas zo groot is, dat een situatie van arbeidsschaarste kan worden vermeden.

Het expansietempo wordt in de situatie van gelijkmatige groei bepaald door het quotiënt van spaarquote (σ) en de constante gemiddelde kapitaalcoëfficiënt (κ). Het bewijs van deze overbekende formulering berust op de definitie van de genoemde grootheden en de gelijkstelling van investeringen (kapitaalaccumulatie) en besparingen. Wordt de output met Y en de kapitaalgoederenvoorraad met K aangeduid, terwijl voor besparingen en investeringen overeenkomstig het gebruik resp. de letters S en I worden gekozen, dan kan worden geschreven:

$$\sigma = \frac{S}{Y} \quad \text{en} \quad \kappa = \frac{K}{Y}$$

Uit de balansvergelijking $S_t = I_t = \dot{K}_t$ volgt dan: [6]

$$\frac{\dot{K}_t}{K_t} = \frac{\sigma}{\kappa} \tag{1}$$

Groeit de kapitaalgoederenvoorraad met een vast percentage, dan dient de output bij een constante kapitaalcoëfficiënt evenredig te stijgen:

$$g_w = \frac{\dot{Y}_t}{Y_t} = \frac{\sigma}{\kappa} \tag{2}$$

De expansie van de output overeenkomstig (2) achten de ondernemers verantwoord, omdat de afzetstijging een *normale* bezetting van de kapitaalgoederenvoorraad garandeert. Harrod spreekt in dit verband dan ook van verantwoorde groeivoet („warranted rate of growth").

Het zal duidelijk zijn, dat de feitelijke kapitaalcoëfficiënt tengevolge van onderbezetting in bovenwaartse richting kan afwijken van de technisch noodzakelijke verhouding tussen kapitaal en produktie. Deze technische relatie tussen kapitaal en produktie moet echter niet als volkomen star worden geïnterpreteerd. Op korte termijn is er in beide richtingen een zekere flexibiliteit doordat machines intensiever of extensiever kunnen worden benut. Vandaar dat in het bovenstaande reeds van een normale bezetting werd gewaagd.

De vraag rijst nu, wat er zal gebeuren bij een afwijking van de verantwoorde groeivoet. Harrod argumenteert, dat een toevallige *extra* stijging van de investeringen via de multiplicator tot een toeneming van het inkomen leidt, die de aangroeiing van de kapitaalgoederenvoorraad overtreft. Dit betekent een daling van de feitelijke kapitaalcoëfficiënt, zodat kapitaal meer schaars en investeren aantrekkelijker wordt. In plaats van een terugkeer van het investeringsvolume naar het pad van de verantwoorde groeivoet, zullen de investeringen in sterkere mate hiervan gaan afwijken. De gelijkmatige groei g_w is instabiel.

Zoals in de literatuur is aangetoond, blijkt deze conclusie van

[6] Een punt boven een variabele geeft de operatie d/dt weer.

Harrod voorbarig.[7] Dit wordt duidelijk bij een nauwkeurige analyse van de onevenwichtige situatie. De feitelijke groeivoet op een bepaald moment is gelijk aan:

$$g_t = \frac{\dot{Y}_t}{Y_t} = \frac{\dot{Y}_t/\dot{K}_t}{Y_t/\dot{K}_t} = \frac{\sigma}{\kappa_t'}, \tag{3}$$

waarbij κ_t' de *marginale* kapitaalcoëfficiënt voorstelt. Uit $g_t > g_w$ volgt onmiddellijk $\kappa_t' < \kappa$. Geldt nu tevens, dat de feitelijke *gemiddelde* kapitaalcoëfficiënt (κ_t) groter is dan de gewenste kapitaalcoëfficiënt (κ), dan kan van een relatieve kapitaalovervloed worden gesproken. De ondernemers zullen in dat geval minder wensen te investeren, hetgeen tot uiting zou kunnen komen in een daling van de marginale kapitaalcoëfficiënt. Dit impliceert vervolgens, dat g_t nog verder van g_w gaat afwijken, zodat het systeem onder deze voorwaarden inderdaad (relatief) instabiel is. Omgekeerd leidt de conditie $g_t < g_w$ tot de gevolgtrekking $\kappa_t' > \kappa$. Een averechts resultaat kan nu optreden, indien daarnaast geldt $\kappa_t < \kappa$, en de ondernemers hierop reageren met een verhoging van de marginale kapitaalcoëfficiënt.

Het bovenstaande, op de argumentatie van Harrod geïnspireerde, bewijs van de instabiliteit berust op de introductie van een tweetal ongelijkheden en een gedragsvergelijking, waarbij wordt verondersteld, dat de ondernemers de feitelijke kapitaalcoëfficiënt in overeenstemming brengen met de gewenste kapitaal-productieverhouding. Onderstreept dient te worden, dat hiermede slechts een voorbeeld van een formele benadering van het onderhavige vraagstuk is gegeven. Alternatieve formuleringen, waaronder meer en minder aansprekende benaderingen van het ondernemersgedrag in niet-evenwichtige situaties, zijn in de literatuur voorhanden. De resultaten van deze modellenbouw zijn verschillend. Terwijl sommige auteurs een stabiel systeem verkrijgen, ondersteunen anderen de conclusie van Harrod. Weer anderen komen tot de bevinding, dat de stabiliteit afhangt van de waarde, die de parameters in het model aannemen.

De probleemstelling van Harrod is in feite een eerste stap op de weg naar een geïntegreerde conjunctuur- en structuurtheorie. Reeds bij dit betrekkelijk eenvoudig opgezette vraagstuk wordt duidelijk, dat de samensmelting van beide theorieën tot een schier eindeloze

[7] Zie bijv. F. H. Hahn en R. C. O. Matthews, art cit., en de aldaar vermelde literatuur.

casuïstiek kan uitgroeien, hetgeen Hahn en Matthews doet verzuchten: „In a sense, therefore, so far fiom there being a difficulty in devising models that reconcile growth and fluctuations, there is an *embarras de richesse*".[8] In het vervolg van ons betoog zullen wij daarom uitsluitend aandacht schenken aan de groeitheorie in engere zin, waarbij van de conjuncturele aspecten wordt geabstraheerd. Zoals bij elke abstractie het geval is, wordt daarmede de realiteit ongetwijfeld te kort gedaan. De economische theorie leeft evenwel bij gratie van de (afwisselende) abstractie.

2.2. *De gelijkmatige groei*

In het vervolg wordt onderscheid gemaakt tussen consumptiegoederen (C) en investeringsgoederen (I). Verondersteld wordt, dat de kapitaalintensiteit van de produktie (K/L) voor deze beide goederen verschilt. De technische coëfficiënten worden evenwel als constant aangemerkt. De arbeidsquoten zijn met de letter α aangeduid, terwijl in overeenstemming met de notatie in paragraaf 2.1 voor de kapitaalquoten de letter κ is gekozen.

De omvang van de beroepsbevolking op tijdstip t is gelijk aan L_t, terwijl voor de kapitaalgoederenvoorraad weer K_t wordt geschreven. Worden de beschikbare volumina van beide produktiefactoren volledig aangewend, dan kan de produktie van de afzonderlijke sectoren worden berekend met behulp van de formules:

$$\alpha_c C_t + \alpha_i I_t = L_t \tag{4}$$

$$\kappa_c C_t + \kappa_i I_t = K_t \tag{5}$$

Uiteraard kunnen de produktiefactoren uitsluitend volledig worden ingeschakeld, indien de berekening van C en I tot positieve uitkomsten leidt. De beschikbaarheidsverhouding K_t/L_t moet derhalve binnen de grenzen, bepaald door de gegeven kapitaalintensiteiten van de beide produktieprocessen, liggen.

Aangenomen wordt, dat de bevolking met een constant en gegeven perunage stijgt:[9]

$$L_t = L_0\, e^{\pi t} \tag{6}$$

De kapitaalgoederenvoorraad neemt toe door de produktie van in-

[8] F. H. Hahn en R. C. O. Matthews, art. cit.

[9] Gemakshalve gaan wij uit van de gedachte, dat de beroepsbevolking een constante fractie van de totale bevolking uitmaakt.

vesteringsgoederen:

$$I_t = \dot{K}_t \tag{7}$$

Teneinde de *existentie* van de gelijkmatige groei aan te tonen, schrijven wij de economische variabelen eerst als grootheden per hoofd van de beroepsbevolking. In tegenstelling tot de absolute grootheden worden de volumina per hoofd met kleine letters aangeduid. Deling van (4) en (5) door L_t geeft respectievelijk:

$$\alpha_c c_t + \alpha_i i_t = 1 \tag{4a}$$

$$\kappa_c c_t + \kappa_i i_t = k_t \tag{5a}$$

Op dezelfde wijze kan in plaats van (7), rekening houdend met (6), worden geschreven:

$$i_t = \frac{\dot{K}_t}{L_t} = \frac{1}{L_t} \cdot \frac{d(k_t L_t)}{dt} = \dot{k}_t + \pi k_t \tag{7a}$$

Substitutie van (4a) en (7a) in (5a) leidt vervolgens tot de relatie:

$$k_t \left[1 - \frac{\pi \xi}{\alpha_c} \right] = \frac{\kappa_c}{\alpha_c} + \frac{\xi}{\alpha_c} \dot{k}_t, \tag{8}$$

waarbij $\xi = \alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c$ de determinant van de matrix van technische coëfficiënten voorstelt.

Uit vergelijking (8) volgt, dat een situatie van gelijkmatige groei bestaat, die bovendien uniek gedetermineerd is. Immers substitutie van $\dot{k}_t = 0$ in (8) geeft:

$$k = \frac{\kappa_c}{\alpha_c - \pi \xi} \tag{9}$$

Heeft de kapitaalgoederenvoorraad in de beginsituatie een zodanige waarde, dat aan (9) wordt voldaan, dan blijft de kapitaal-arbeidsverhouding constant. Alle economische variabelen nemen in dat geval evenredig met de (beroeps)-bevolking toe. Gelijkmatige groei bij volledige inschakeling van beide produktiefactoren is mogelijk, indien geldt:

$$\frac{\kappa_c}{\alpha_c} \gtrless k \gtrless \frac{\kappa_i}{\alpha_i}$$

Zoals door middel van substitutie in (9) gemakkelijk kan worden geverifieerd, komt deze voorwaarde neer op de eis: $0 < \pi < (1/\kappa_i)$.

Het model kan nog worden uitgebreid door rekening te houden met de relaties tussen de prijzen van de eindprodukten (p_c en p_i) en de beloningsvoeten van de produktiefactoren (p_l en p_r). Bij volledige mededinging zijn de gemiddelde kosten (op lange termijn) gelijk aan de prijs. Derhalve kunnen op grond van de veronderstelling van volkomen concurrentie de volgende prijsvormingsfuncties worden opgesteld:

$$p_c = \alpha_c p_l + \kappa_c p_r \tag{10}$$

$$p_i = \alpha_i p_l + \kappa_i p_r \tag{11}$$

Verder wordt verondersteld, dat zowel van het loon- als van het kapitaalinkomen een constant, maar verschillend, gedeelte wordt bespaard. De (gemiddelde) spaarintensiteiten van loon- en kapitaalinkomentrekkers worden respectievelijk met σ_l en σ_r aangegeven. Aangezien de besparingen gelijk zijn aan de investeringen, mag nu worden geschreven:

$$Ip_i = \sigma_r K p_r + \sigma_l L p_l \tag{12}$$

Na substitutie van (7) en deling door Kp_r gaat (12), ingeval van een gelijkmatige groei, over in:

$$\frac{\pi}{r} = \sigma_r + \sigma_l \frac{\lambda_l}{\lambda_k}, \tag{12a}$$

waarbij

$$r = \frac{p_r}{p_i} \quad \text{en} \quad \frac{\lambda_l}{\lambda_k} = \frac{Lp_l}{Kp_r}, \qquad (\lambda_l + \lambda_k = 1).$$

Met behulp van het gecompleteerde model kunnen verschillende problemen van *comparatief-dynamische* aard worden bestudeerd. Wij beperken ons hier tot een enkel voorbeeld. In navolging van Hicks zal worden nagegaan hoe de categoriale inkomensverdeling verandert bij een wijziging in de spaarneiging van kapitaaleigenaren.[10]

Uit de relaties (9), (11) en de definitievergelijking $p_r = rp_i$ kan de volgende betrekking worden afgeleid:

$$\frac{\lambda_l}{\lambda_k} = \frac{1}{\lambda_k} - 1 = \left[\frac{1}{\kappa_i r} - 1\right] \frac{\alpha_c \kappa_i - \xi \kappa_i \pi}{\alpha_i \kappa_c} \tag{13}$$

$$\therefore \lambda_k = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{voor } r = \begin{cases} 1/\kappa_i \\ 0 \end{cases}, \text{ en } \lambda_k = \kappa_i r, \text{ indien } \xi = 0.$$

Vervolgens kan (12a) door enige manipulatie op soortgelijke wijze

[10] Cf. Hicks, op. cit., hoofdstuk XV.

worden geschreven als:

$$\frac{\lambda_l}{\lambda_k} = \frac{1}{\lambda_k} - 1 = \left[\frac{1}{\frac{\sigma_r}{\pi} r} - 1\right]^{\frac{\sigma_r}{\sigma_l}} \qquad (14)$$

$$\therefore \lambda_k = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{voor } r = \begin{cases} \pi/\sigma_r \\ 0 \end{cases}, \text{ en } \lambda_k = (\sigma/\pi) r, \text{ indien } \sigma_l = \sigma_r = \sigma.$$

Dank zij de specifieke schrijfwijze van de formules (13) en (14) kunnen deze op doeltreffende wijze in een grafiek worden weergegeven. Het verband tussen λ_k en r is in beide functies positief. Indien de vermenigvuldigingsfactor buiten de haken gelijk aan één is, zijn de functies lineair. Bij een vermenigvuldigingsfactor groter dan één, is de curve convex, terwijl omgekeerd bij een factor kleiner dan één het functionele verband tussen λ_k en r concaaf verloopt.

Aangenomen mag worden, dat de kapitaalinkomenstrekkers meer sparen dan de werknemers ($\sigma_r > \sigma_l$), zodat het verband tussen λ_k en r overeenkomstig formule (14) door een convexe curve kan worden voorgesteld. De uitdrukking buiten de haken in formule (13) is kleiner of groter dan één al naargelang ξ kleiner of groter dan nul is.[11] De vorm van de curve hangt in dit geval derhalve af van de relatieve kapitaal- c.q. arbeidsintensiteit van de beide sectoren. In de figuren 1*a* en 1*b* zijn twee mogelijkheden geïllustreerd. De coördinaten van het snijpunt S zijn gelijk aan de oplossingen voor λ_k en r bij de gegeven parameters van het model.

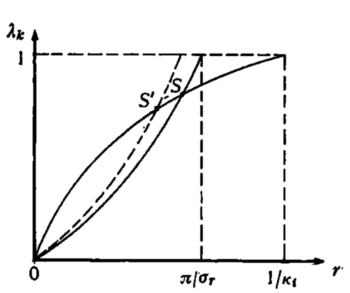

Fig. 1a ($\xi < 0$)

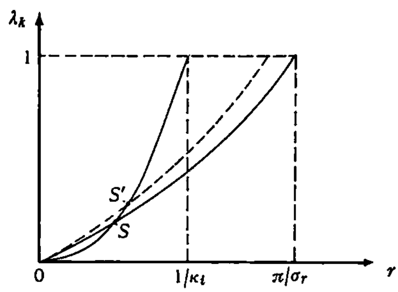

Fig. 1b ($\xi > 0$)

[11] $\xi < 0$ betekent $\alpha_c \kappa_l < \alpha_l \kappa_c$, zodat

$$\frac{\alpha_c \kappa_l - \xi \kappa_l \pi}{\alpha_l \kappa_c} = \frac{\alpha_c \kappa_l}{\alpha_l \kappa_c}(1 - \kappa_l \pi) + \kappa_l \pi < 1.$$

De consequenties van wijzigingen in de parameters kunnen, rekening houdend met (13) en (14), uit de beide figuren 1*a* en 1*b* worden afgelezen. Het inzicht in het model kan evenwel worden verdiept door hierbij in plaats van een strikt mathematische een meer *heuristische* benaderingswijze te volgen, zoals wij voor het geval dat σ_r groter wordt, zullen demonstreren.

Een vergroting van de spaarneiging van kapitaaleigenaren leidt in eerste instantie tot een snellere expansie van de kapitaalgoederenvoorraad. Aangezien de bevolking met het oorspronkelijke percentage toeneemt, zal het groeitempo van de kapitaalgoederenvoorraad vervolgens in benedenwaartse richting moeten worden aangepast. In de vorige paragraaf hebben wij gezien, dat de groeivoet van kapitaal gelijk is aan het quotiënt van de gemiddelde macro-economische spaarquote en de gemiddelde macro-economische kapitaalcoëfficiënt. Zoals met name uit vergelijking (12) kan worden afgeleid, is de spaarquote over het nationale inkomen (σ) gelijk aan:

$$\sigma = \lambda_l \sigma_l + \lambda_k \sigma_r \tag{15}$$

De gemiddelde kapitaalcoëfficiënt voor de gehele economie kan nu als volgt worden bepaald:

$$\kappa = \frac{Kp_i}{Y} = \frac{(K_c + K_i)p_i}{Y} = \frac{Cp_i}{Y}\kappa_c + \frac{Ip_i}{Y}\kappa_i =$$

$$= (1 - \sigma)\frac{p_i}{p_c}\kappa_c + \sigma\kappa_i \tag{16}$$

Een lagere groeivoet van kapitaal kan worden gerealiseerd door middel van een daling van de macro-economische spaarquote. Volgens vergelijking (15) zal de categoriale inkomensverdeling dan ten gunste van de factor arbeid dienen te worden gewijzigd ($\sigma_r > \sigma_l$). In de literatuur is met name door N. Kaldor op deze samenhang gewezen. Daalt de macro-economische spaarquote, dan neemt de gemiddelde kapitaalcoëfficiënt evenwel overeenkomstig (16) toe, indien de consumptiegoederensector relatief kapitaalintensief is ($\xi < 0$). Is daarentegen de investeringsgoederensector naar verhouding meer kapitaalintensief, dan daalt κ. In dit geval verandert de kapitaalcoëfficiënt dus kennelijk in de verkeerde richting. Het is nu voorstelbaar, dat, indien de I-goederensector sterk kapitaalintensief en het verschil in spaarneiging gering is, het laatstgenoemde effect domineert. In dat geval zal een aanpassing van de groeivoet van kapitaal alleen tot stand komen bij een stijging van de macro-economische spaarquote σ en een dienovereenkomstige daling van de loonquote λ_l. Deze ongetwijfeld extreme situatie is weergegeven in figuur 1*b*. Door een stijging van σ_r komt een nieuw snijpunt S' tot stand, waarbij zowel het rendement r als de kapitaalinkomensquote op een hoger niveau liggen.

De meer normale situatie is in figuur 1*a* uitgebeeld. Een stijging van de spaarintensiteit van kapitaaleigenaren leidt in dit geval, zoals het punt S' laat zien, tot een daling van het kapitaalrendement, alsmede van de kapitaalinkomensquote. Arbeid is relatief schaarser geworden en de loontrekkers profiteren hiervan. Indien meerdere technieken per sector worden onderscheiden, behoeft een daling van het rendement overigens niet noodzakelijk te leiden tot een daling van de kapitaalinkomensquote en een stijging van de loonquote. De categoriale inkomensverdeling is in een dergelijke situatie mede afhankelijk van de substitutiemogelijkheden, hetgeen overigens in het licht van de resultaten van de statische theorie geen verrassende conclusie is.[12]

2.3. *Technische vooruitgang en gelijkmatige groei*

Een autonome technische ontwikkeling manifesteert zich als een stijging van de output in de loop van de tijd, die niet aan een toeneming van de inputs kan worden toegeschreven. In het onderhavige model kan met de technische vooruitgang rekening worden gehouden door middel van een daling van de technische coëfficiënten. Wij zullen thans twee duidelijk niet geheel realistische veronderstellingen invoeren. In de eerste plaats wordt verondersteld, dat de technische vooruitgang tot uiting komt in een exponentiële daling van de arbeids- en kapitaalquoten. In de tweede plaats wordt gesteld, dat alle aanwezige kapitaalgoederen even produktief zijn.[13] Vervolgens zal worden onderzocht welke voorwaarden voor de existentie van een gelijkmatige groei vervuld moeten zijn.

Stel in eerste instantie, dat de macro-economische spaarquote constant is. De kapitaalcoëfficiënt zal nochtans tengevolge van de technische vooruitgang dalen. Men kan nu echter de eis stellen, dat de technische ontwikkeling zodanig dient te zijn, dat bij een con-

[12] Voor een nadere uitwerking kan worden verwezen naar J. R. Hicks, op. cit., hoofdstuk XV.

[13] De situatie waarbij kapitaalgoederen de laatste stand van de techniek „belichamen" is onder anderen uitvoerig geanalyseerd door E. S. Phelps, „Substitution, fixed proportions, growth and distribution", *International Economic Review*, september 1963.

stant rendement ook de kapitaalcoëfficiënt dezelfde waarde behoudt. De categoriale inkomensverdeling is dan constant, terwijl het kapitaal met een vast percentage zal toenemen. De gelijkmatige groei is dus in dit geval verzekerd.[14] Bovendien kan dan de voorwaarde van een constante σ worden vervangen door de hypothese van gegeven spaarneigingen van de afzonderlijke groepen van inkomensrecipiënten. Immers, indien λ_l en λ_k geen wijziging ondergaan, zal ook σ gelijk blijven. Is aan de bovengenoemde voorwaarde met betrekking tot de technische vooruitgang voldaan, dan zegt men doorgaans, dat de technische vooruitgang *neutraal op de wijze van Harrod* is.

De consequenties van een neutrale technische ontwikkeling volgens Harrod kunnen in het kader van het model met twee sectoren met behulp van vergelijking (16) worden gevonden. Uit de prijsvormingsfuncties (10) en (11) volgt, rekening houdend met $r = p_r/p_i$:

$$\frac{p_i}{p_c} = \frac{\alpha_i}{\alpha_c - \xi r} \tag{17}$$

Substitutie van (17) in (16) geeft vervolgens:

$$\kappa = (1 - \sigma)\frac{\alpha_i \kappa_c}{\alpha_c - \xi r} + \sigma\kappa_i \tag{16a}$$

Bij een gegeven rendement zal de kapitaalcoëfficiënt derhalve constant blijven, indien geldt:

$$\dot{\kappa}_i = 0, \tag{a}$$

en

$$\frac{\dot{\alpha}_c}{\alpha_c} = \frac{\dot{\alpha}_i}{\alpha_i} + \frac{\dot{\kappa}_c}{\kappa_c} \tag{b}$$

Uit deze voorwaarden blijkt, dat bij een constante technologie van de investeringsgoederenindustrie ($\dot{\alpha}_i = \dot{\kappa}_i = 0$) neutraliteit van de technische vooruitgang op de wijze van Harrod overeenstemt met neutraliteit op de wijze van Hicks. Hoewel Hicks de technische vooruitgang classificeerde met behulp van wijzigingen in de grensprodukten, kunnen zijn definities naar analogie ook op het geval van strikte factorcomplementariteit worden toegepast. Neutraliteit impliceert dan een evenredige daling van de desbetreffende factor-

[14] Cf. H. Uzawa, „Neutral inventions and the stability of growth equilibrium", *Review of Economic Studies*, februari 1961.

quoten. Zoals een analyse van C. Kennedy leert, heeft de op grond van de condities (a) en (b) getrokken conclusie overigens een meer algemene strekking dan het onderhavige model wellicht zou doen vermoeden.[15]

Voor het existeren van een gelijkmatige groei dient de technische vooruitgang aan zeer speciale voorwaarden, naast de in het begin van deze paragraaf reeds geïntroduceerde veronderstellingen, te beantwoorden. Dit betekent, dat de comparatief-dynamische analyse nauwelijks aan algemeenheid inboet, indien de technische ontwikkeling buiten beschouwing wordt gelaten. Overigens illustreert dit nog eens de beperkte betekenis van het begrip gelijkmatige groei.

2.4. *Stabiliteit van de gelijkmatige groei („equilibrium dynamics")*

Teneinde na te gaan, of de groei bij een willekeurig gegeven uitgangssituatie naar het pad van de gelijkmatige ontwikkeling convergeert, herschrijven wij vergelijking (8) als:

$$\dot{k}_t - \left[\frac{\alpha_c}{\xi} - \pi\right] k_t = - \frac{\kappa_c}{\xi} \tag{8a}$$

De oplossing van deze differentiaalvergelijking volgens de standaardtechniek leidt tot:

$$k_t = \frac{\kappa_c}{\alpha_c - \pi\xi} + \left[k_0 - \frac{\kappa_c}{\alpha_c - \pi\xi}\right] e^{[\alpha_c/\xi - \pi]t} \tag{18}$$

Voor $t \to \infty$ gaat de oplossing in (18) naar de evenwichtswaarde, weergegeven in (9), indien $\xi < 0$. In het geval $\xi > 0$ is de exponent van de e-macht positief, zodat de afwijking van de evenwichtswaarde in de loop van de tijd groter wordt; het systeem is dan instabiel.

Geconcludeerd kan dus worden, dat de gelijkmatige groei (globaal) stabiel is, indien de consumptiegoederensector relatief kapitaalintensief is. Dit resultaat kan op een meer heuristische wijze als volgt worden afgeleid. Stel, dat de situatie van gelijkmatige expansie plotseling verstoord wordt door een daling van de groeivoet van de bevolking. De kapitaalgoederenvoorraad stijgt nu in eerste instantie nog overeenkomstig het oude tempo. Dit betekent, dat kapitaal sneller groeit dan arbeid, zodat om de volledige bezetting te

[15] C. Kennedy, „The character of improvements and of technical progress", *Economic Journal*, december 1962.

kunnen handhaven de relatief meer kapitaalintensieve sector niet alleen meer zal moeten expanderen dan de arbeidsintensieve sector, maar zelfs harder zal dienen te groeien dan de factor kapitaal. Omgekeerd geldt in een dergelijke situatie, dat de minder expansieve sector in groeitempo achter blijft bij de stijging van de langzamer groeiende produktiefactor. Men spreekt in dit verband wel van het „magnification effect".[16] Een en ander houdt in, dat bij een relatief kapitaalintensieve investeringsgoederensector de groeivoeten van arbeid en kapitaal steeds verder uiteen zullen gaan lopen. Voor een stabiele ontwikkeling is het dus noodzakelijk, dat de consumptiegoederensector de meest kapitaalintensieve is.

Welke betekenis moet aan het gevonden resultaat worden toegekend? Het heeft natuurlijk weinig zin te onderzoeken of in de werkelijkheid de consumptiegoederenindustrie dan wel de investeringsgoederensector de meest kapitaalintensieve is. De feitelijke groei verloopt volgens meer ingewikkelde patronen dan met behulp van het simpele model kan worden aangeduid. Dit noopt tot het reduceren van de abstractiegraad van het model. Vooruitgang langs de weg van de afnemende abstractie is evenwel moeizaam. Wij zullen daarom op deze plaats met enkele opmerkingen volstaan.

Zoals in een aantal studies is aangetoond, kan door het introduceren van voldoende substitutiemogelijkheden de stabiliteit in het model met twee sectoren worden verzekerd.[17] Daarbij rijst de vraag, of kapitaalgoederen wel voldoende flexibel zijn om een vlotte substitutie te garanderen. Is het niet veeleer zo, dat eenmaal geïnstalleerde machines tamelijk starre produktie-eenheden vormen, zodat van substitutie achteraf geen sprake kan zijn? Natuurlijk kan men dan nog volhouden, dat in ieder geval nog te ontwerpen machines naar believen met arbeid gecombineerd kunnen worden. Ook deze uitspraak is echter aan twijfel onderhevig. Uiteindelijk is men bij het investeren afhankelijk van de stand van de techniek *op een bepaald moment*. Of de stand van de techniek door middel van een fraai stelsel van indifferentiecurven kan worden weergegeven, is op zijn minst dubieus.

Wat te zeggen van een generalisatie tot *n* sectoren met behoud van de constante technische coëfficiënten? Generalisaties van dit

[16] Zie bijv. R. W. Jones, „The structure of simple general equilibrium models", *Journal of Political Economy*, december 1965.

[17] Zie bijv. A. Takayama, „On a two-sector model of economic growth: a comparative statics analysis", *Review of Economic Studies*, juni 1963.

type leiden, zoals de analyse van het gesloten model van Leontief leert, tot ondoorgrondelijke mathematische stabiliteitsvoorwaarden.[18] Een meer realistisch model zou ongetwijfeld worden verkregen door van gegeven normale in plaats van starre technische produktiecoëfficiënten uit te gaan en tevens de afzetproblematiek, zoals deze in paragraaf 2.1 ter sprake kwam, in de beschouwing te betrekken. Daarenboven zou nog rekening kunnen worden gehouden met prijsmutaties en winstverwachtingen. De pogingen tot constructie van een dergelijk meer compleet dynamisch model met meerdere sectoren zijn echter begrijpelijkerwijze schaars.[19]

Groei zonder vernieuwing is ondenkbaar. Vandaar, dat de technische vooruitgang als de belangrijkste determinant van de expansie mag worden aangemerkt. Onze kennis is op dit punt nog zeer onvolledig. De traditionele groeitheorie is gebaseerd op algemene evenwichtsmodellen van statische origine. Wellicht zal bij de bestudering van de betekenis van de technische vooruitgang voor de *feitelijke groei* meer de nadruk moeten worden gelegd op historische en institutionele patronen. Het aan de evenwichtsanalyse inhaerente *deterministische* karakter treedt dan bij het onderzoek naar de stabiliteit van de economische ontwikkeling vanzelf minder op de voorgrond.

3. DE NORMATIEVE GROEITHEORIE

Met de groeitheorie is ook het vraagstuk van de optimale besparingen in het centrum van de belangstelling gekomen. De probleemstelling consumeren versus investeren nodigt daarbij als het ware uit tot een macro-economische beschouwingswijze. Ondanks de bezwaren, die hieraan ongetwijfeld verbonden zijn, zullen wij in deze paragraaf slechts één eindprodukt onderscheiden. Het aantal in de beschouwing betrokken produktiefactoren bedraagt wederom twee, te weten arbeid en kapitaal.

In paragraaf 3.1 zal de aanbodzijde van het model nader worden verkend. Zoals zal blijken, kan op basis van de gelijkmatige groei en een neoklassieke produktiefunctie een spaarquote worden gevonden, waarbij de consumptie in de loop van de tijd maximaal is. Daarmede is echter de optimale spaarquote nog geenszins bepaald.

[18] J. Tsukui, „On a theorem of relative stability", *International Economic Review*, mei 1961.

[19] Voor een uitzondering, die de regel bevestigt, zie F. H. Hahn, „On the disequilibrium behaviour of a multi-sectoral growth model", *Economic Journal*, september 1963.

De formulering van het optimum vereist de introductie van de preferenties met betrekking tot de consumptie op verschillende tijdstippen. Daarom zal in paragraaf 3.2 een collectieve intertemporele nutsfunctie ten tonele worden gevoerd. Nagegaan zal worden op welke wijze deze functie hanteerbaar kan worden gemaakt.

Tenslotte wordt in paragraaf 3.3 het probleem van de optimale besparingen bij een oneindige tijdhorizon gesteld en voor een speciaal geval ook opgelost. Deze oplossing berust op een door F. Ramsey in 1928 ontwikkelde methode.[20] Het verschil tussen het werk van Ramsey en de recente studies van vooraanstaande contemporaine theoretici is slechts gradueel. Terwijl in de moderne groeitheorie bevolkingsaanwas en technische vooruitgang voor een eeuwigdurende expansie zorgen, is het systeem van Ramsey op weg naar een stationaire toestand. De invloed van Ricardo is daarbij nog duidelijk merkbaar.

3.1. *De maximale consumptie*

Een typisch neoklassieke produktiefunctie, waarmede wij in deze paragraaf zullen werken, voldoet gewoonlijk aan de volgende eisen: (a) de functie is lineair homogeen; (b) de grensprodukten zijn positief; (c) de tweede afgeleiden naar een bepaalde factor zijn negatief (afnemende grensprodukten). Voorbeelden, die aan de gestelde eisen voldoen, zijn de produktiefunctie van Cobb en Douglas en de zgn. CES-produktiefunctie, waarbij de substitutie-elasticiteit van de produktiefactoren constant, maar niet gelijk aan één is.

Verder wordt verondersteld, dat de bevolking met een vast percentage toeneemt. Eenvoudshalve wordt van de technische vooruitgang geabstraheerd. Een neutrale technische ontwikkeling volgens de definitie van Harrod manifesteert zich bij een macro-economische produktiefunctie als arbeidsvermeerderend.[21] Dit betekent, dat de technische vooruitgang als het ware de dimensie van de factor arbeid beïnvloedt. Het behoeft weinig betoog, dat met de introductie van een technische vooruitgang van dit type weinig nieuws aan de analyse zou worden toegevoegd.

Op grond van de gemaakte veronderstellingen kunnen de volgende vergelijkingen worden geformuleerd:

$$Y_t = F(K_t, L_t) \tag{19}$$

[20] F. P. Ramsey, „A mathematical theory of saving", *Economic Journal*, december 1928.

[21] Zie voor een bewijs van deze stelling H. Uzawa, art. cit.

$$Y_t = C_t + I_t \qquad C_t \geq 0 \tag{20}$$

$$I_t = \dot{K}_t \tag{21}$$

$$L_t = L_0\, e^{\pi t} \tag{22}$$

De betekenis van de symbolen is dezelfde als in paragraaf 2. De constante L_0 kan door een adequate keuze van de maateenheid van arbeid gelijk aan één worden gesteld, zodat deze in het verdere betoog zonder bezwaar kan worden verwaarloosd.

Deelt men vervolgens de economische variabelen door L_t dan resulteert, rekening houdend met de lineaire homogeniteit van de produktiefunctie, het volgende vergelijkingenstelsel:

$$y_t = F(k_t, 1) = f(k_t) \tag{19a}$$

$$y_t = c_t + i_t \tag{20a}$$

$$i_t = \dot{k}_t + \pi k_t \tag{21a}$$

In overeenstemming met de notatie in paragraaf 2 duiden de kleine letters grootheden per hoofd van de (beroeps-)bevolking aan. Verder kan worden opgemerkt, dat de afleiding van vergelijking (12a) analoog is aan die van (7a).

Uit de vergelijkingen (19a) t/m (21a) volgt onmiddellijk, dat bij een constante k_t (dus $\dot{k}_t = 0$) ook de overige economische variabelen y, c en i een vaste waarde aannemen. De existentie van de gelijkmatige groei is daarmede een feit. In tegenstelling tot het resultaat in paragraaf 2.2 impliceert de gelijkmatige groei evenwel geen unieke oplossing voor k. Een expansie overeenkomstig de natuurlijke groeivoet π is mogelijk bij diverse waarden van de verhoudingsgetallen in de relaties (19a) t/m (21a). In feite bestaat er dan een hele *verzameling van gelijkmatige groeipaden*. De karakteristieken van deze verzameling zullen nu nader worden onderzocht.

Substitutie van (19a) en (21a) in (20a) geeft, indien rekening wordt gehouden met $\dot{k}_t = 0$:

$$c = f(k) - \pi k \tag{23}$$

Het verband tussen de consumptie en de kapitaalgoederenvoorraad beide gerelateerd aan het arbeidsvolume is weergegeven in figuur 2 Het rechterlid van vergelijking (23) is daarbij gemakshalve aangeduid met $g(k)$.

Zoals uit de figuur blijkt, heeft de functie (23) een maximum. Anderzijds is er een bovengrens aan de kapitaalgoederenvoorraad per eenheid arbeid ($k_{max.}$). Wordt deze grens overschreden, dan is de produktie te kapitaalintensief, zodat te veel zeilen zouden moeten worden bijgezet om de kapitaalintensiteit te handhaven. De consumptie zou dan negatief moeten zijn, hetgeen uitgesloten is. De

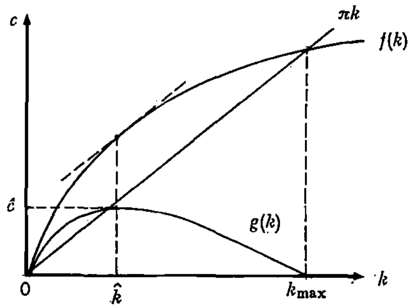

Fig. 2

kapitaalgoederenvoorraad per eenheid arbeid $\hat{k}$, waarbij de consumptie maximaal is, wordt gevonden door de eerste afgeleide van (23) gelijk aan nul te stellen. Derhalve geldt:

$$\frac{dc}{dk} = f'(k) - \pi = 0, \tag{24}$$

waarbij

$$f' = \frac{df}{dk} = \frac{\partial Y_t}{\partial K_t}$$

De consumptie per hoofd is dus kennelijk maximaal ($c = \hat{c}$), indien het *grensprodukt van kapitaal gelijk is aan de natuurlijke groeivoet.* Volledigheidshalve zij opgemerkt, dat, als aan (24) voldaan is, tevens het totale consumptievolume ($C_t = c\, e^{\pi t}$) op elk tijdstip een maximale waarde bereikt. Dit op zich interessante resultaat werd door Phelps quasi-normatief bestempeld als de „golden rule of accumulation".[22] Als uitsluitend uit paden met een gelijkmatige groei zou moeten worden gekozen, is het pad van de „golden rule" ogenschijnlijk het beste. Een dergelijke keuze impliceert evenwel, dat k_0 een vrij goed is. Aan het gevonden resultaat kan mede daarom slechts een beperkte betekenis worden toegekend.[23]

[22] E. S. Phelps, „The golden rule of accumulation", *American Economic Review*, september 1961.

[23] Een gelijkmatige groei met $\hat{k} < k < k_{max.}$ is *dynamisch inefficiënt.* Zoals figuur 2 leert, is er altijd een kleinere k te vinden, waarbij de consumptie even hoog is!

In aansluiting op het gevonden resultaat in (24) vermelden wij nog, dat de spaarquote behorende bij het „golden rule" pad gelijk is aan de produktie-elasticiteit van kapitaal. Het bewijs van deze stelling is gemakkelijk te geven. In een situatie van gelijkmatige groei mag worden geschreven: $\sigma = \pi\kappa$. Door combinatie van deze formule met $\partial Y_t/\partial K_t = \pi$ overeenkomstig (24) ontstaat

$$\sigma = \frac{\partial Y_t}{\partial K_t} \cdot \frac{K_t}{Y_t}$$

Bij een gegeven kapitaalgoederenvoorraad in de uitgangssituatie kan altijd een pad van gelijkmatige groei worden gevolgd. Indien $k_0 > \hat{k}$ is het pad met een maximale consumptie bereikbaar door een gedeelte van de aanwezige kapitaalgoederenvoorraad niet te benutten. Dit is evenwel niet verstandig, daar de kapitaalgoederen zonder meer beschikbaar zijn. Wel blijkt het op lange termijn gewenst minder te investeren, waardoor de kapitaalintensiteit daalt en extra consumptie zal worden genoten.

In een situatie, waarbij men van relatieve kapitaalschaarste zou kunnen spreken (dus $k_0 < \hat{k}$), liggen de kaarten enigszins anders. Deze situatie is ongetwijfeld voor de huidige tijd de meest realistische. Ook in dit geval kan desgewenst een pad van gelijkmatige groei worden gevolgd. Daarbij zal de consumptie dan echter niet maximaal zijn. Het „golden rule" pad ligt niet onmiddellijk binnen het bereik. Wel kan men ten koste van consumptie-offers de kapitaalintensiteit van de produktie opvoeren, met de bedoeling op latere tijdstippen een hogere consumptie te realiseren. Bij de afweging van kosten en opbrengsten dienen evenwel de preferenties in acht te worden genomen. Overigens geldt *mutatis mutandis* hetzelfde bij de aanpassing van de kapitaalintensiteit in benedenwaartse richting in het geval $k_0 > \hat{k}$.

Indien de consumptie als het ware op verschillende tijdstippen plaats vindt is eigenlijk sprake van evenzoveel andere goederen. Het vergelijken van goederenbundels is echter alleen mogelijk, indien de verhouding tussen de goederen onderling gefixeerd is (zoals bij een gelijkmatige groei het geval is met betrekking tot de consumptie op verschillende tijdstippen), of indien een nutsfunctie wordt gehanteerd. Een nadere analyse van de optimale groei vereist dan ook de introductie van een intertemporeel preferentieschema.

3.2. *De intertemporele preferenties*

Het heeft bepaalde didactische voordelen bij een bespreking van de intertemporele nutsfunctie de tijd in eerste instantie als een discrete grootheid op te vatten. Gesteld kan dan bijvoorbeeld worden, dat het collectieve nut aan het begin van de planningperiode af-, hankelijk is van de consumptie per hoofd in alle toekomstige perioden, in symbolen:

$$U = Q(c_1, c_2, c_3 \ldots) \tag{26}$$

Hoewel aan deze functie de gebruikelijke eigenschappen van een (ordinale) nutsfunctie kunnen worden toegekend, is de relatie in haar algemene vorm nauwelijks hanteerbaar. Vandaar, dat in de literatuur gezocht is naar aanvullende, plausibele hypothesen. In dit verband mag zeker het werk van T. C. Koopmans niet onvermeld blijven.[24]

Postuleert men, dat het nut van de consumptie per hoofd in een bepaalde periode *onafhankelijk* is van de consumptie in andere perioden, dan gaat (26) over in de zgn. additieve vorm:

$$U = \sum_{t=1}^{\infty} u_t(c_t) \tag{27}$$

De additieve nutsfunctie is nauw verbonden met de kardinalistische nutsopvatting.[25] Nochtans behoeft aan dit aspect in de onderhavige theorie niet zwaar getild te worden. In samenhang met het postulaat van de onafhankelijkheid wordt gewoonlijk tevens uitgegaan van stationariteit van de intertemporele preferenties. Dit wil zeggen, dat het verband geen wijziging ondergaat bij realisatie van consumptie, of anders geformuleerd: dat de preferenties niet afhankelijk zijn van de historische tijd. Op grond van de beide bovengenoemde veronderstellingen dient de functie dan als volgt te worden geschreven:

$$U = \sum_{t=1}^{\infty} \mu^{t-1} u(c_t), \qquad 0 < \mu \leq 1 \tag{28}$$

De constante μ kan worden geïnterpreteerd als een discontofactor, welke maatgevend is voor de tijdsvoorkeur. Volgens sommige auteurs, waaronder Ramsey, zou men evenwel niet moeten disconte-

[24] Zie T. C. Koopmans, „Stationary ordinal utility and impatience", *Econometrica*, april 1960.

[25] Zie bijv. Th. van de Klundert, „Essentiële aspecten van de theorie van het consumentengedrag", *Maandschrift Economie*, januari 1967.

ren om toekomstige generaties op dezelfde wijze te behandelen als de levende generatie.

Bij de interpretatie van de tijd als een continue grootheid komt in plaats van (28) de analoge relatie:

$$U = \int_0^\infty u(c_t)\, e^{-\rho t}\, dt, \qquad \rho \geq 0 \tag{29}$$

De letter ρ geeft in dit geval de (constante) discontovoet weer. Te vermelden is nog, dat de functie $u(c)$ ongelimiteerd en degressief stijgend is (positief, maar afnemend grensnut).

Het geval $\rho = 0$ is in meerdere opzichten speciaal. In de eerste plaats kan men stellen, dat hoewel nu „generaties" gelijk worden behandeld, dit niet geldt voor „individuen". (De termen „generatie" en „individu" hebben een enigszins figuurlijke betekenis. Nochtans blijkt uit de context voldoende wat ermede wordt bedoeld). De grootheid $u(c)$ is in feite de nutssnelheid van het representatieve economische subject. Houdt men bij de bepaling van de sociale welvaartsfunctie met de nutssnelheid van alle individuen rekening, dan verkrijgt men de volgende intertemporele nutsfunctie:

$$U = \int_0^\infty L_t u(c_t)\, dt = \int_0^\infty e^{\pi t}\, u(c_t)\, dt \tag{30}$$

Discontering van de individuele nutssnelheid met π leidt tot:

$$U = \int_0^\infty e^{\pi t}\, u(c_t)\, e^{-\pi t}\, dt = \int_0^\infty u(c_t)\, dt \tag{31}$$

Zoals blijkt is (31) gelijk aan (29) in het geval $\rho = 0$.

In de tweede plaats moet worden geconstateerd, dat de (oneigenlijke) integraal in formule (31) niet convergeert, indien de consumptie per hoofd ten eeuwigen dage strikt positief blijft. Consumptiepaden, die *niet* aan deze voorwaarde voldoen zijn echter niet interessant. Anderzijds is een discriminatie tussen consumptiepaden, waarbij de consumptie steeds positief blijft, op grond van het criterium van nutsmaximering uitgesloten. Immers het niet convergeren van de integraal impliceert, dat het nut oneindig groot is. Tussen twee paden, die allebei een nut van oneindig opleveren, kan niet worden gekozen. Betekent dit, dat alleen een optimumpad existeert voor $\rho > 0$?

Het antwoord op deze vraag kan ontkennend luiden, mits een maximumwaarde voor de nutssnelheid bestaat („bliss" bij Ramsey).

Aangenomen werd evenwel, dat de functie $u(c)$ geen bovengrens heeft. Een maximum voor de consumptie per hoofd ($\tilde{c}$) is echter voldoende. Volgens het criterium van Ramsey en Von Weizsäcker zijn in een dergelijk geval uitsluitend paden, die naar „bliss" tenderen verkiesbaar.[26] Het optimale consumptiepad benadert de maximale nutssnelheid op de voordeligste wijze. In plaats van maximalisatie van U vereist het nieuwe criterium derhalve *minimalisatie* van de uitdrukking:

$$V = \int_0^\infty [u(\tilde{c}) - u(c_t)]\, dt \tag{32}$$

3.3. *De optimale besparingen*

In paragraaf 3.1 werd geconstateerd, dat de consumptie per hoofd maximaal is, indien het marginale produkt van het kapitaal gelijk is aan de groeivoet van de bevolking. Op het einde van de vorige paragraaf bleek, dat een dergelijk maximum voor de bepaling van een optimaal consumptiepad in het geval van een gelijke behandeling van „generaties" essentieel is. Door beide resultaten te combineren kan een optimaal patroon voor de besparingen worden gevonden. Daartoe dient de volgende opdracht te worden uitgevoerd: Minimaliseer:

$$V = \int_0^\infty [u(\hat{c}) - u(c_t)]\, dt,$$

onder de nevenvoorwaarden:

(a) $c_t = f(k_t) - \pi k_t - \dot{k}_t$

(b) $k_0 = \bar{k}$

(c) $c_t \geq 0$

De nevenvoorwaarde (a) is afgeleid uit de vergelijkingen (19a) t/m (21a). Volgens voorwaarde (b) is de kapitaalgoederenvoorraad in de uitgangssituatie gegeven. De derde conditie spreekt voor zichzelf.

Het gestelde probleem is oplosbaar met behulp van de methoden van de variatierekening. Zoals Ramsey voor het stationaire geval heeft aangetoond, is echter ook langs meer eenvoudige weg een oplossing mogelijk.[27] Door een simpele transformatie kan de integraal

[26] Cf. C. C. von Weizsäcker, „Existence of optimal programs of accumulation for an infinite horizon", *Review of Economic Studies*, april 1965.
[27] F. P. Ramsey, art. cit.

V worden omgezet in:

$$V = \int_{k_0}^{\hat{k}} \frac{u(\hat{c}) - u(c_t)}{\dot{k}_t}\, dk_t \tag{33}$$

Deze transformatie is in deze vorm geoorloofd, indien $k_0 < \hat{k}$, zodat de kapitaalintensiteit zal toenemen ($\dot{k}_t > 0$) tot „bliss" gerealiseerd is. Voor een minimale waarde van V is het noodzakelijk, dat de eerste afgeleide van de integrand in (33) naar $\dot{k}_t$ gelijk aan nul is. Voor elke waarde van k (tussen de integratiegrenzen) dient de uitdrukking onder het integraal teken immers zo laag mogelijk te zijn. Derhalve geldt, rekening houdend met nevenvoorwaarde (a):

$$\frac{\dot{k}_t u'(c_t) - \{u(\hat{c}) - u(c_t)\}}{\dot{k}_t^2} = 0,$$

oftewel:

$$\dot{k}_t = \frac{u(\hat{c}) - u(c_t)}{u'(c_t)} \tag{34}$$

waarbij $u'(c_t) = du(c_t)/dc_t$ het grensnut van de consumptie (per hoofd) voorstelt.

Uit formule (34) en de nevenvoorwaarden (a) t/m (c) kan het optimale consumptiepad stap voor stap worden afgeleid.

Dat de extreme waarde een minimum is, kan worden bewezen met behulp van de tweede afgeleide van de integrand naar $\dot{k}_t$:

$$\frac{\dot{k}^2(-\dot{k}u'' + u' - u') - (\dot{k}u' - \hat{u} + u)\dot{k}}{\dot{k}^4} = -\frac{u''}{\dot{k}} > 0$$

De tweede afgeleide van $u(c)$ is negatief vanwege de veronderstelde daling van het grensnut ($u'' < 0$).

Uit formule (34) blijkt, dat het „golden rule" pad *asymptotisch* wordt benaderd. De kapitaalintensiteit neemt langzamer toe naarmate c_t nadert tot $\hat{c}$. Dat het optimale pad naar het pad van de maximale consumptie toegaat, was reeds bekend. De asymptotische nadering als zodanig is echter extra informatie.

Indien gedisconteerd wordt, zodat ρ in formule (29) strikt positief is, mag aan de „golden rule" geen normatieve betekenis worden toegekend. Dit kan door middel van een eenvoudige exercitie plausibel worden gemaakt.[28] Noodzakelijk is daarbij evenwel, dat de

[28] Cf. E. S. Phelps, „The Ramsey problem and the golden rule of accumulation", Cowles Foundation Discussion Paper, no. 194, oktober 1965.

tijd als een discrete grootheid wordt opgevat. Stel nu, er is een te volgen consumptiepad $c_1, c_2, c_3 \ldots$. In periode 1 besluiten de economische subjecten ieder één eenheid meer te sparen met de intentie in periode 2 dank zij produktieve investeringen extra te kunnen consumeren. In periode 2 wordt bovendien de extra investering weer teniet gedaan, zodat in de perioden 3 t/m ∞ de consumptie blijft zoals deze oorspronkelijk was voorzien. De (nuts-)kosten van het consumptieverlies in periode 1 bedragen bij benadering $u'(c_1)$. De totale consumptie stijgt tot $L_1(1 + r_1)$ in periode 2. De letter r staat voor het rendement van investeringen, dat gelijk is aan het grensprodukt van kapitaal. Per hoofd van de bevolking neemt de consumptie toe met:

$$L_1(1 + r_1)/L_2 = (1 + r_1)(1 + \pi)^{-1}.$$

Uitgedrukt in nutseenheden bedraagt de opbrengst:

$$(1 + r_1)(1 + \pi)^{-1}u'(c_2)(1 + \rho)^{-1}$$

Indien het oorspronkelijk pad optimaal is, moet (natuurlijk bij benadering) gelden:[29]

$$u'(c_t) = \frac{1 + r_t}{(1 + \pi)(1 + \rho)} u'(c_{t+1}) \qquad (35)$$

Bij een gelijkmatige groei is de consumptie per hoofd constant ($c_t = c_{t+1}$), zodat in een dergelijk geval alleen aan de optimumvoorwaarde (35) wordt voldaan, indien $1 + r = (1 + \pi)(1 + \rho)$. Bij een continu tijdsbegrip gaat dit resultaat over in $r = \pi + \rho$. De kapitaalintensiteit van dit pad, dat in de literatuur wel wordt omschreven als het „golden utility path", is kleiner dan $\hat{k}$. Een blik op figuur 2 is voldoende om dit in te zien. De tg van de hellingshoek van een raaklijn aan $f(k)$ is gelijk aan r. Hoe groter r, hoe kleiner de corresponderende k zal zijn. Zoals onder anderen door D. Cass is aangetoond, nadert het optimale consumptiepad in het geval $\rho > 0$, gegeven een willekeurige uitgangssituatie, asymptotisch tot het „golden utility" pad.[30]

De mathematische elegantie van de besproken analyses is haast verblindend. Het kost nogal wat moeite er achter te komen hoe ab-

[29] Formule (35) is analoog met de voorwaarde van Euler noodzakelijk voor een maximum van (29) onder de gestelde nevenvoorwaarden. Het verschil vloeit voort uit de interpretatie van de tijd als discrete grootheid.

[30] D. Cass, „Optimum growth in an aggregative model of capital accumulation", *Review of Economic Studies*, juli 1965.

stract en hoe weinig operationeel de conclusies zijn. Synthetisch werk heeft zijn nut, maar men moet niet overdrijven door een teveel aan franje. De normatieve groeitheorie zal minder pretentieus moeten worden opgezet (eindige tijdhorizon) en op meer informatie met betrekking tot de intertemporele produktiemogelijkheden en wensen dienen te berusten.[31] Vanzelfsprekend zal dit gepaard moeten gaan met een desaggregatie, maar deze mag niet primair in dienst staan van de bouw van gigantische evenwichtsconstructies. Dergelijke modellen hebben wij reeds door het werk van J. von Neumann en zijn epigonen. Herhaald kan worden, hetgeen bij de bespreking van de positieve groeitheorie in paragraaf 2 werd gesteld. Er is behoefte aan een zekere heroriëntering, waarbij een aantal aan de natuurwetenschappen ontleende technieken het veld zullen moeten ruimen voor meer flexibele, op de evolutiegedachte geïnspireerde, methoden.[32] De etikettenplakkers kunnen dan achteraf voor het epitheton kiezen tussen post-Schumpeteriaans en neo-historisch.

APPENDIX

Vergelijking van „Twee visies op het vraagstuk van de kapitaalaccumulatie" met „Bouwen aan een groeitheorie" (De Economist, november, 1963).

1. Het onderhavige artikel is in tegenstelling tot het bovengenoemde niet primair een literatuurstudie, maar meer een systematische analyse van de groeitheorie. Sinds 1963 is het aantal literatuuroverzichten gestadig uitgebreid. Vooral na het verschijnen van het uitstekende overzicht van Hahn en Matthews is er weinig behoefte aan een nieuwe etalering van de complete literatuur op het gebied van de economische groei. Wel kan het nog nuttig zijn wat bomen in het bos te kappen en aldus de structuur van de theorie bloot te leggen. De onderscheidingen positieve versus

[31] Cf. T. Haavelmo, *A study in the theory of investment*, 1960, hoofdstuk 20.

[32] Cf. T. C. Koopmans, „Objectives, constraints and outcomes in optimal growth models", Cowles Foundation Discussion Paper no. 212, augustus 1966; en H. A. Simon, „Theories of decision-making in economics and behavioural science", *American Economic Review*, juni 1959, herdrukt in *Surveys of Economic Theory*, deel III, 1966. Voor een toepassing van beide benaderingswijzen op het vraagstuk van de internationale handel in een groeiende economie zie Th. van de Klundert, „Theorieën van de economische groei en de internationale handel", *Tijdschrift voor Economie*, 1966, aflev. 2.

normatieve theorie enerzijds, en „equilibrium" tegenover „disequilibrium dynamics" anderzijds werken in dit opzicht verhelderend.

2. Van de onderwerpen uit het artikel van 1963, waarvan verwacht mocht worden, dat deze verder zouden worden uitgewerkt, is in „Twee visies, enz." alleen aandacht geschonken aan de optimale besparingen. Dit vraagstuk is in de afgelopen jaren veelvuldig ter sprake gebracht in de literatuur. Het krijgt in het onderhavige artikel een groot gewicht. Daarentegen is voor een onderwerp als de marginale technische vooruitgang („embodied technical progress") geen plaats ingeruimd, hoewel ook aan dit onderwerp in de literatuur hard gewerkt is.
3. Het model van Von Neumann en de daarop gebaseerde studies ontbreken in beide publicaties. Sinds het werk van Hicks („Capital and Growth") is de analyse van de groei op basis van de aktiviteitsanalyse voor niet uitgesproken wiskundig geschoolde economisten toegankelijker geworden. Nochtans zou de bespreking van deze rijk geschakeerde problematiek een afzonderlijk artikel noodzakelijk maken.
4. De symbolen zijn voorzover mogelijk en doelmatig gelijk. Er is één belangrijke uitzondeiing. Grote letters duiden in „Bouwen aan een groeitheorie" waardebedragen aan en kleine letters volumina. In het onderhavige artikel geven kleine letters volumina per hoofd van de beroepsbevolking weer, terwijl de hoofdletters deze volumina op zich beschouwd symboliseren.

Summary

TWO VIEWS ON THE PROBLEM OF CAPITAL ACCUMULATION

A systematic presentation of the theory of economic growth is given by distinguishing positive and normative economics. With respect to the positive theory of economic growth the survey first pays attention to the difficulties resulting from the divergence of actual and warranted rates of growth in the model of Harrod.

Problems belonging to the domain of „disequilibrium dynamics", to borrow an expression from F. H. Hahn and R. C. O. Matthews, are eliminated in the remaining part of the article. The standard two-sector model with fixed technical coefficients is introduced to analyse the existence and stability of balanced growth. The same model is ap-

plied to illustrate „the comparative dynamics that corresponds to comparative statics", as Hicks puts it in *Capital and Growth.* It is found that an increase in the propensity to save of capital owners usually raises the share of wages. There may be an exception if the production of investment goods is strongly capital-intensive relative to the production of consumption goods. In addition to the topics mentioned above Harrod neutral technical change is given some comment.

In the section on normative growth theory the time-honoured problem of optimal savings is discussed. Following recent developments in this field subsections are devoted to the „golden rule of accumulation" and T. C. Koopmans' work on the intertemporal preference function. Finally, the question of optimal accumulation is solved for the special case of no discounting of future *per capita* consumption flows. The method used goes back to the famous pioneering article of F. P. Ramsey in the *Economic Journal* of December, 1928.